TD 27-28 : Applications linéaires

Applications linéaires

Exercice 1. Les applications suivantes suivantes sont-elles linéaires ?

1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $\quad f(x,y) = (x+y, x-2y, 0)$
2) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $\quad f(x,y) = (2x+y, y+1)$
3) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $\quad f(x,y) = (xy, yx)$
4) $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ définie par $\quad f(z_1, z_2) = z_1 - \overline{z_2}$ $\quad$ ($\mathbb{C}^2$ et $\mathbb{C}$ sont vus comme des $\mathbb{C}$-e.v.)
5) $f : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^3$ définie par $\quad f(u) = (u_0, u_1, u_2)$
6) $f : \mathbb{K}_2[X] \to \mathbb{K}$ définie par $\quad f(P) = \int_0^1 P(t)dt$
7) $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par $\quad f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = a+d$
8) $\varphi : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ définie par $\quad \varphi(f) = f'' - 4f$
9) $\varphi : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ définie par $\quad \varphi(f) = 2ff'$

Exercice 2. Déterminer les applications linéaires $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ qui vérifient

$$f(1,0,0) = (-2,0,2) \qquad f(0,1,0) = (0,3,0) \qquad f(0,0,1) = (-4,0,4)$$

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire qui vérifie

$$f(1,4,1) = (4,-1,4) \qquad f(-2,3,3) = (3,2,1) \qquad f(0,2,1) = (1,-5,5)$$

1) Justifier l'existence et l'unicité de f.
2) Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer $f(x,y,z)$.

Image, noyau, rang (dimension finie)

Exercice 4. On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x,y,z) = (x+y+z, 3x-5y+z)$$

1) Déterminer Ker f, ainsi qu'une base et sa dimension.
2) Déterminer Im f, ainsi qu'une base et sa dimension.
3) f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Exercice 5. On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x,y) = (x, x+y, x+2y)$$

1) Déterminer Ker f, ainsi qu'une base et sa dimension.
2) Déterminer Im f, ainsi qu'une base et sa dimension.
3) f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Exercice 6. On considère l'application $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ définie par

$$f(x,y,z) = (-2x+y+z, x-y, x-2y+z)$$

1) Déterminer $\operatorname{Ker} f$, ainsi qu'une base et sa dimension.
2) Déterminer $\operatorname{Im} f$, ainsi qu'une base et sa dimension.
3) f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Exercice 7. Soit $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z\right\}$. Existe-t-il une application $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ de noyau F ?

Exercice 8. Soit α, β, γ trois réels distincts et $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par $f(P) = (P(\alpha), P(\beta), P(\gamma))$.

1) Déterminer $\operatorname{Ker} f$, ainsi qu'une base et sa dimension.
2) En déduire $\operatorname{Im} f$ par un résultat de dimension.
3) Mais au fait, étant donné $(a,b,c) \in \operatorname{Im} f$, quel(s) polynôme(s) $P \in \mathbb{R}_2[X]$ vérifie(nt) $f(P) = (a,b,c)$?

Exercice 9. On pose $E = \mathcal{C}(\mathbb{R})$ et $f_1, f_2, f_3, f_4 \in E$ les fonctions définies par :

$$f_1(t) = \sin t \qquad f_2(t) = \cos t \qquad f_3(t) = t \sin t \qquad f_4(t) = t \cos t$$

Enfin on définit $F = \operatorname{Vect}(f_1, f_2, f_3, f_4)$.

1) Montrer que $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ est une base de F. En déduire sa dimension.
2) On considère l'application $D : f \mapsto f'$. Montrer que D est un endomorphisme de F.
3) Déterminer $\operatorname{Ker} D$ et $\operatorname{Im} D$. Que peut-on en déduire sur D ?

Image, noyau, rang (dimension quelconque)

Exercice 10. On considère l'application $f : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$ définie par $f(P) = P'$.

1) Déterminer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.
2) f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Exercice 11. On définit $\varphi : \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ par

$$\varphi : (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

Montrer que φ est linéaire et déterminer $\operatorname{Ker} \varphi$ et $\operatorname{Im} \varphi$. Est-ce que φ est injective ? surjective ?

Exercice 12. Soit E, F, G trois $\mathbb{K}$-e.v. puis $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$.

1) Montrer que $g \circ f = 0$ si et seulement si $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g$.
2) Montrer que $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker}(g \circ f)$ et que $\operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im} g$.
3) En déduire que si $g \circ f$ est un isomorphisme, alors f est injective et g est surjective.

Exercice 13. Soit E un e.v. et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer les assertions suivantes :

$$\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2 \qquad\qquad \operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2 \iff \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0_E\}$$

$$\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f \qquad\qquad \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2 \iff \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f = E$$

Projecteurs, symétries, etc.

Exercice 14. Déterminer si les applications linéaires suivantes sont des projecteurs ou des symétries, et déterminer leurs éléments caractéristiques :

1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (x, -2x-y)$
2) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = (x+y-z, x+y-z, x+y-z)$
3) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = \dfrac{1}{2}(x-z, 2y, -x+z)$
4) $f_A : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ définie par $f(P) = R$, où R est le reste de la division euclidienne de P par $A \in \mathbb{R}[X]$ fixé.

Exercice 15. Déterminer l'expression :

1) Du projecteur $p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ sur $F = \mathrm{Vect}((0,1))$ parallèlement à $G = \mathrm{Vect}((1,1))$.
2) De la symétrie $s \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ par rapport à F et parallèlement à G (définis ci-dessus).
3) De la symétrie $s \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ par rapport à $F = \mathrm{Vect}\left((1,2,3)\right)$ et parallèlement à $G = \mathrm{Vect}\left((1,0,0),(1,1,0)\right)$.
4) Du projecteur $p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ sur G et parallèlement à F (définis ci-dessus).

Exercice 16. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ et $q = \mathrm{id}_E - p$.

1) Montrer que p est un projecteur si et seulement si q est un projecteur.
2) On suppose que p est un projecteur. Montrer que $\mathrm{Im}\, p = \mathrm{Ker}\, q$ et que $\mathrm{Ker}\, p = \mathrm{Im}\, q$.

Exercice 17. Soit p, q deux projecteurs de E. Montrer que

$$\mathrm{Ker}\, p = \mathrm{Ker}\, q \iff (p \circ q = p \qquad \text{et} \qquad q \circ p = q)$$
$$\mathrm{Im}\, p = \mathrm{Im}\, q \iff (p \circ q = q \qquad \text{et} \qquad q \circ p = p)$$

Formes linéaires

Exercice 18. On pose $E := \mathbb{R}^2$ et $f, g \in E^*$ les applications

$$f(x,y) = x+y \qquad\qquad g(x,y) = x-y$$

1) Montrer que (f,g) forme une base de E^*.
2) Déterminer les coordonnées de $p : (x,y) \mapsto x$ et de $q : (x,y) \mapsto y$ selon la base (f,g).
3) Trouver une base (u,v) de E telle que (f,g) soit la base duale de (u,v).

Exercice 19. Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. et $f \in E^*$. Montrer que f est surjective ou identiquement nulle.

Exercice 20. On considère l'ensemble $E = \mathbb{R}_n[X]$. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$ on pose $\varphi_k : E \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi_k(P) = P(k)$.

1) Montrer que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on a $\varphi_k \in E^*$.
2) Montrer que $(\varphi_0, \cdots, \varphi_n)$ est une base de E^*.
3) En déduire qu'il existe $\lambda_0, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X] \qquad \int_0^n P(t)dt = \lambda_0 P(0) + \lambda_1 P(1) + \ldots + \lambda_n P(n)$$

Remarque : on peut montrer le même résultat si on remplace l'intégrale ci-dessus par $\displaystyle\int_a^b P(t)dt$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ quelconques. Cependant, les $\lambda_0, \cdots, \lambda_n$ dépendront de a, b.